talk2: section 1, section 2, section 3, section 4, section 6.
talk2’: section 5, section 7, section 8, section 9, section 10.

の予定です。2019 年 11 月 26 日 (火曜日) 時点では、talk2’ で話す分しかこのノートを書いていません。talk2 の分は気が向いたら書きます。

第 I 部
Basics of Model Categories and Examples

1 Definitions

2 The Homotopy Category

3 Quillen Adjunctions

4 Examples

5 Localizations of Model Categories

Recall. $\mathcal{T}$ をトポスとする。つまりあるサイト $\mathcal{C}$ が存在して $\mathcal{T} \cong \mathsf{Sh}(\mathcal{C})$ となる圏とする。

- 二つのトポス $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ の**間の射** (geometric morphism) $f : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ とは、左随伴 $f^* : \mathcal{T}' \to \mathcal{T}$ と右随伴 $f_* : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ の対 $f = (f^*, f_*)$ であって、f^* が有限極限を保つことを言う。
- トポス $\mathcal{T}$ の**点** (point) とは、トポスの射 $f : \mathsf{Set} \to \mathcal{T}$ のことである。
- トポスが**十分点を持つ** (has enough points) とは、ある点の族 $f_i : \mathsf{Set} \to \mathcal{T}$ が存在して、同型を反映することを言う。ただしここで、同型を反映するとは、以下の条件を満たすことを言う：任意の $\mathcal{T}$ の射 $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ について、φ が同型射であることと、任意の i に対して $f_i^*(\varphi)$ が同型射であることは同値である。
- サイト $\mathcal{C}$ が**十分点を持つ**とは、$\mathsf{Sh}(\mathcal{C})$ が十分点を持つことを言う。

$\mathcal{C}$ を十分点を持つサイトとすると、以下の性質が成り立つ：

- $\mathsf{Sh}(\mathcal{C})$ は $\mathsf{PSh}(\mathcal{C})$ の充満部分圏であり、包含函手は右随伴函手である。
- 層化 (左随伴)$\mathsf{PSh}(\mathcal{C}) \to \mathsf{Sh}(\mathcal{C})$ は有限極限を保つ。
- $\mathsf{PSh}(\mathcal{C})$ の射の族 $\mathcal{W}$ を、各 stalk に同型射を引き起こす前層の射の集合とすると、$\mathsf{Sh}(\mathcal{C}) \cong \mathsf{PSh}(\mathcal{C})[\mathcal{W}^{-1}]$ である。

このような状況を、$\mathsf{Sh}(\mathcal{C})$ は $\mathsf{PSh}(\mathcal{C})$ の**反映的局所化** (reflexive localization) と言う。

$$\mathsf{Sh}(\mathcal{C}) \cong \mathsf{PSh}(\mathcal{C})[\mathcal{W}^{-1}] \underset{\text{left exact left adj.}}{\overset{\text{fully faithful right adj.}}{\rightleftarrows}} \mathsf{PSh}(\mathcal{C})$$

反映的局所化をホモトピー圏で実現するようなモデル圏に関する十分条件を述べるのが次の左 Bousfield 局

所化である：

定義 5.1. $\mathcal{C}$ をモデル圏とする。$\mathcal{C}$ の左 **Bousfield 局所化** (left Bousfield localization) $\mathcal{C}_{\mathrm{loc}}$ とは、以下を満たすモデル圏のことである：

- 圏としては $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\mathrm{loc}}$ である。
- $\mathcal{C}of_{\mathcal{C}_{\mathrm{loc}}} = \mathcal{C}of_{\mathcal{C}}$ である。
- $\mathcal{W}e_{\mathcal{C}_{\mathrm{loc}}} \supset \mathcal{W}e_{\mathcal{C}}$ である。

注意 5.2. 以下が成り立つ：

- $\mathcal{F}ib_{\mathcal{C}_{\mathrm{loc}}} = (\mathcal{C}of_{\mathcal{C}_{\mathrm{loc}}} \cap \mathcal{W}e_{\mathcal{C}_{\mathrm{loc}}})^{\perp} \subset (\mathcal{C}of_{\mathcal{C}} \cap \mathcal{W}e_{\mathcal{C}})^{\perp} = \mathcal{F}ib_{\mathcal{C}}$
- $\mathcal{F}ib_{\mathcal{C}_{\mathrm{loc}}} \cap \mathcal{W}e_{\mathcal{C}_{\mathrm{loc}}} = \mathcal{C}of_{\mathcal{C}_{\mathrm{loc}}}^{\perp} = \mathcal{C}of_{\mathcal{C}}^{\perp} = \mathcal{F}ib_{\mathcal{C}} \cap \mathcal{W}e_{\mathcal{C}}$

特に Q を $\mathcal{C}$ の cofibrant replacement 函手とすれば、それは $\mathcal{C}_{\mathrm{loc}}$ の cofibrant replacement 函手でもある。さらに

- $\mathrm{id} : \mathcal{C}_{\mathrm{loc}} \to \mathcal{C}$ は右 Quillen 函手

となり、ホモトピー圏の随伴

$$\mathrm{Ho}(\mathcal{C}_{\mathrm{loc}}) \underset{\text{left adj. } \mathbb{L}\,\mathrm{id}}{\overset{\text{right adj. } \mathbb{R}\,\mathrm{id}}{\rightleftarrows}} \mathrm{Ho}(\mathcal{C})$$

を得る。

命題 5.3. $\mathcal{C}_{\mathrm{loc}}$ が $\mathcal{C}$ の左 Bousfield 局所化であるとき、$\mathbb{R}\,\mathrm{id} : \mathrm{Ho}(\mathcal{C}_{\mathrm{loc}}) \to \mathrm{Ho}(\mathcal{C})$ は忠実充満である。

証明. 右随伴が忠実充満であることは、随伴の unit が自然同型であることと同値であることに注意する。$\bar{X} \in \mathrm{Ho}(\mathcal{C}_{\mathrm{loc}}), (X \in \mathcal{C}_{\mathrm{loc}})$ を任意に取り、自然な射 $\mathbb{L}\,\mathrm{id}(\mathbb{R}\,\mathrm{id}(\bar{X})) \to \bar{X}$ が同型射であれば良い。$\overline{Q(F_{\mathrm{loc}}(X)))} \cong \mathbb{L}\,\mathrm{id}(\mathbb{R}\,\mathrm{id}(\bar{X})), \overline{F_{\mathrm{loc}}(X)} \cong \bar{X}$ であるから、X は $\mathcal{C}_{\mathrm{loc}}$ の fibrant 対象として良い。すると $Q(X) \to X$ が $\mathcal{C}$ の weak equivalence であることから $\overline{Q(X)} \cong \mathbb{L}\,\mathrm{id}(\mathbb{R}\,\mathrm{id}(\bar{X})) \to \bar{X}$ は $\mathrm{Ho}(\mathcal{C}_{\mathrm{loc}})$ の同型射となる。 □

疑問. $\mathcal{C}$ をモデル圏とする。任意に与えた射の (小さい) 集合 $S \subset \mathcal{M}or(\mathcal{C})$ に対し、$\mathcal{C}$ の新しいモデル構造であって、weak equivalence がもとの weak equivalence と S で "ちょうど" 生成されるようなものがあるか？

定理 5.4 (Smith の定理,nLab 参照)**.** $\mathcal{C}$ を left proper combinatorial なモデル圏とし、$S \subset \mathcal{M}or(\mathcal{C})$ を射の小さい集合とする。このとき S に属する射を "ちょうど" 可逆化するような $\mathcal{C}$ の新しいモデル構造があり、それを $L_S\mathcal{C}$ と表せば、$L_S\mathcal{C}$ は $\mathcal{C}$ の左 Bousfield 局所化となる。

例 5.5. S をネータースキーム、$\mathsf{Sm}_{/S}$ を S 上 smooth なスキームのなす圏とし、**Nisnevich 位相**によりサイトと考える。ただしスキームの射 $f : X \to Y$ が **Nisnevich** であるとは、f が étale 射であって、さらに任意の Y の閉点 $y \in Y$ に対してある点 $x \in X$ が存在して、$f(x) = y$ かつ $k(x) = k(y)$ となることを言う ($k(x)$ は剰余体)。Nisnevich 位相はこの射によって生成される位相のことである。

一般に、(十分点を持つ) サイト $\mathcal{C}$ 上の単体的 (前) 層のなす圏 $\mathsf{sSh}(\mathcal{C}), \mathsf{sPSh}(\mathcal{C})$ は **Joyal-Jardine モデル構造**により left proper combinatorial なモデル圏となる。ここで Joyal-Jardine モデル構造における weak equivalence は、各 stalk の間に weak equivalence を引き起こす射が単体的集合の weak equivalence であり、cofibration はモノ射のことである。このモデル構造を考えるとき、$\mathsf{sSh}(\mathcal{C})_J, \mathsf{sPSh}(\mathcal{C})_J$ と書く。

$S :\overset{\text{def}}{=} \{h_{X\times\mathbb{A}^1} \to h_X\}$ とおけば、Smith の定理により左 Bousfield 局所化 $L_S(\mathsf{sSh}(\mathsf{Sm}_{/S}))$ が存在する。このホモトピー圏 $\mathrm{Ho}(L_S(\mathsf{sSh}(\mathsf{Sm}_{/S})))$ を**モチヴィックホモトピー圏**と言う。

第 II 部

Model Structures on Pro(sSh($\mathcal{C}$))

6 Pro-categories

7 Weak Fibration Categories

今後の議論のために、技術的であるが以下の概念を導入しておく：

定義 7.1. $\mathcal{C}$ を圏、$\mathcal{M} \subset \mathcal{C}$ を部分圏、N を $\mathcal{C}$ の射の族とする。このとき $(\mathcal{C}, N, \mathcal{M})$ が **factorization category** であるとは、以下の条件を全て満たすことを言う：

- $\mathcal{C}$ は有限完備である。
- $\mathcal{M}$ は基底変換で閉じる。
- $\mathcal{M}or(\mathcal{C}) = \mathcal{M} \circ N$ を満たす。この等号の意味は、任意の $\mathcal{C}$ の射 f に対し、ある $\mathcal{M}$ に属する射 g と N に属する射 h が存在して、$f = g \circ h$ となる、という意味である。functorial であることは仮定しない。

factorization category に関する主な結果として、以下が挙げられる。証明は少々大変である ([BaSc, 命題 3.15] 参照)：

定理 7.2. $(C, N, \mathcal{M})$ を factorization category とする。このとき、任意の Pro($\mathcal{C}$) の射 $f : X \to Y$ に対して $X \xrightarrow{g} H_f \xrightarrow{h} Y$ という **functorial** な分解であって、$g \in \mathrm{Lw}^{\cong}(N) \cap {}^{\perp}\mathcal{M}, h \in \mathrm{Sp}^{\cong}(\mathcal{M})$ となるものが存在する。

定義 7.3. $\mathcal{C}$ を圏、$\mathcal{F}, \mathcal{W} \subset \mathcal{C}$ を部分圏とする。$(\mathcal{C}, \mathcal{W}, \mathcal{F})$ が **weak fibration category** であるとは、以下の条件を全て満たすことを言う：

- $\mathcal{W}$ は 2 out of 3 を満たす。
- $(\mathcal{C}, \mathcal{W}, \mathcal{F}), (\mathcal{C}, \mathcal{C}, \mathcal{F} \cap \mathcal{W})$ はそれぞれ factorization category である。

例 7.4. $\mathcal{C}$ がモデル圏であるとき、$(\mathcal{C}, \mathcal{W}e, \mathcal{F}ib)$ は weak fibration category である。

例 7.5 (non-trivial example!!)**.** [Jar, 4 章] 参照。$\mathcal{C}$ を (十分点を持つ小さい) サイトとする。sSh($\mathcal{C}$) または sPSh($\mathcal{C}$) の射 f について、以下の定義をする：

- f が **local weak equivalence** であるとは、任意の点での stalk が simplicial set の weak equivalence であることを言う。
- f が **local fibration** であるとは、任意の点での stalk が simplicial set の fibration であることを言う。

このとき $(\mathsf{sSh}(\mathcal{C}), \text{local we.}, \text{local fib.}), (\mathsf{sPSh}(\mathcal{C}), \text{local we.}, \text{local fib.})$ は weak fibration category である ([BaSc, 7 章] 参照)。これらの weak fibration category の構造が、あるモデル圏の構造の忘却となるとは限らないことに注意しておく (その意味で non-trivial example)。

local fibration に関して以下のことに注意しておく。まず、simplicial set の fibration は、$\Lambda^n_k \to \Delta^n$ に関して right lifting property を満たすものである。よって特に、以下の図式が各点 p について成り立つことが、

$f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ が local fibration であることの定義である：

$$\begin{tikzcd} \Lambda^n_k \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}_p \arrow[d, "f_p"] \\ \Delta^n \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "\exists"] & \mathcal{G}_p \end{tikzcd}$$

Λ^n_k, Δ^n はそれぞれ finite な simplicial set なので、射 $\Lambda^n_k \to \mathcal{F}, \Delta^n \to \mathcal{G}$ はそれぞれ p の近傍 U へと持ち上がる (サイトの点に対する近傍の定義は [Stacks, Tag 00Y3] 参照)。従って次の simplicial set の図式を得る：

$$\begin{tikzcd} \Lambda^n_k \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}(U) \arrow[d, "f(U)"] \\ \Delta^n \arrow[r] & \mathcal{G}(U) \end{tikzcd}$$

斜めの射が存在することは、この図式に "local な" リフトが存在することに等しい。つまり、f が local fibration であることは、任意の U と任意に与えた上記の可換図式に対し、U の被覆 $\{V_i \to U\}$ が存在し、任意の i に対して以下のリフトが存在することと同値である：

$$\begin{tikzcd} \Lambda^n_k \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}(U) \arrow[r] & \mathcal{F}(V_i) \arrow[d, "f(V_i)"] \\ \Delta^n \arrow[r] \arrow[urr, dashed, "\exists"] & \mathcal{G}(U) \arrow[r] & \mathcal{G}(V_i) \end{tikzcd}$$

同様に、f が local trivial fibraton、つまり local weak equivalence かつ local fibration であることは、任意の U と任意の可換図式

$$\begin{tikzcd} \partial\Delta^n \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}(U) \arrow[d, "f(U)"] \\ \Delta^n \arrow[r] & \mathcal{G}(U) \end{tikzcd}$$

に対し、U の被覆 $\{V_i \to U\}$ が存在し、任意の i に対して以下のリフトが存在することと同値である：

$$\begin{tikzcd} \partial\Delta^n \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}(U) \arrow[r] & \mathcal{F}(V_i) \arrow[d, "f(V_i)"] \\ \Delta^n \arrow[r] \arrow[urr, dashed, "\exists"] & \mathcal{G}(U) \arrow[r] & \mathcal{G}(V_i) \end{tikzcd}$$

定理 7.6. $(\mathcal{C}, \mathcal{W}, \mathcal{F})$ を (homotopically small pro-admissible な) [*1]weak fibration category とする。このとき、$\mathsf{Pro}(\mathcal{C})$ は以下のモデル圏の構造を持つ：

- $\mathcal{W}e = \mathrm{Lw}^{\cong}(\mathcal{W})$,
- $\mathcal{F}ib = R(\mathrm{Sp}^{\cong}(\mathcal{F}))$,

[*1] ここでは定義しない。詳しくは [BaSc, 4 章] を参照。

- $\mathcal{C}of = {}^{\perp}(\mathcal{F} \cap \mathcal{W})$. ただし constant な pro-object によって $\mathcal{C} \subset \mathsf{Pro}(\mathcal{C})$ とみなしている。

さらにこのとき

- $\mathcal{F}ib \cap \mathcal{W}e = R(\mathrm{Sp}^{\cong}(\mathcal{F} \cap \mathcal{W}))$
- $\mathcal{C}of \cap \mathcal{W}e = {}^{\perp}\mathcal{F}$

となる。

証明. 詳細は [BaSc, 4 章] 参照。射の分解に関する以下のことだけ注意しておく：定理 7.2によって $\mathsf{Pro}(\mathcal{C})$ の任意の射 $f : X \to Y$ は $g \in \mathrm{Lw}^{\cong}(\mathcal{W}) \cap {}^{\perp}\mathcal{F}, h \in \mathrm{Sp}^{\cong}(\mathcal{F})$ または $g \in {}^{\perp}(\mathcal{F} \cap \mathcal{W}), h \in \mathrm{Sp}^{\cong}(\mathcal{F} \cap \mathcal{W})$ によって functorial に $X \xrightarrow{g} H_f \xrightarrow{h} Y$ と分解する。 □

系 7.7. $\mathsf{Pro}(\mathsf{sSh}(\mathcal{C}))$ は (いろいろな意味で) モデル圏となる。一つは $\mathsf{sSh}(\mathcal{C})_J$ を weak fibration category と思った場合に入るモデル圏の構造である。もう一つは local weak equivalence と local fibration によって weak fibration category と思った場合に入るモデル圏の構造である。後者のモデル圏を $\mathsf{Pro}(\mathsf{sSh}(\mathcal{C}))_{\mathrm{loc}}$ と書くことにする。

注意 7.8. $\mathcal{C}$ を (homotopically small pro-admissible) weak fibration category とする。このとき constant な pro-object を対応させる函手 $\mathcal{C} \to \mathsf{Pro}(\mathcal{C})$ は $\mathrm{Ho}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ho}(\mathsf{Pro}(\mathcal{C}))$ を引き起こす。この函手は一般に忠実充満であることが示せる ([BaSc, 6 章] 参照)。

注意 7.9. 反映的局所化

$$\mathsf{sSh}(\mathcal{C}) \underset{\text{left exact left adj.}}{\overset{\text{fully faithful right adj.}}{\rightleftarrows}} \mathsf{sPSh}(\mathcal{C})$$

から引き起こされるモデル圏の間の随伴

$$\mathsf{Pro}(\mathsf{sSh}(\mathcal{C}))_{\mathrm{loc}} \rightleftarrows \mathsf{Pro}(\mathsf{sSh}(\mathcal{C}))_{\mathrm{loc}}$$

は Quillen 同値である。これは loc を J に変えても同じ。さらに

$$\mathsf{Pro}(\mathsf{sSh}(\mathcal{C}))_{\mathrm{loc}} \rightleftarrows \mathsf{Pro}(\mathsf{sSh}(\mathcal{C})_J)$$

も Quillen 同値である。

注意 7.10. $\mathcal{C}$ が対象が一点のみのサイトの場合。このとき $\mathsf{sPSh}(\mathcal{C})_J = \mathsf{sSh}(\mathcal{C})_J = \mathsf{sSet}_{\mathrm{Quillen}}$ であり、さらに $\mathsf{Pro}(\mathsf{sSet}_J) = \mathsf{Pro}(\mathsf{sSet})_{\mathrm{loc}}$ となる。このモデル圏の構造は [Isa, 10 節] において "strong model structure" と呼ばれている。今後、たんに $\mathsf{Pro}(\mathsf{sSet})$ と書いた場合には、このモデル圏の構造で考えることにする。

8 The Isaksen Model Structure on Pro(sSet)

定義 8.1. X を単体的集合とする。以下の随伴により groupoid の圏へうつしたものを $\Pi(X)$ と書いて、X の **fundamental groupoid** と言う：

$$\mathsf{sSet} \underset{\text{nerve}}{\rightleftarrows} \mathsf{Cat} \underset{\text{forget}}{\overset{\mathcal{C} \mapsto \mathcal{C}[\mathcal{C}^{-1}]}{\rightleftarrows}} \mathsf{Cat}$$

X 上の**局所系** (local system) とは、函手圏 $\mathcal{LS}(X) :\stackrel{\mathrm{def}}{=} [\Pi(X), \mathsf{Ab}]$ の対象のことを言う。

注意 8.2. Ab 以外に値をもつ場合も局所系と言う用語を使うことがある。たとえば $\Pi_1(X) : \Pi(X) \to \mathsf{Gp}, x \mapsto \pi_1(X, x)$ など。

例 8.3. $\Pi_n(X) : \Pi(X) \to \mathsf{Ab}(\mathsf{Gp}), x \mapsto \pi_n(X, x)$

補題 8.4. $(f : X \to Y) \in \mathsf{sSet}$ に対して $f : \Pi(X) \to \Pi(Y)$ が引き起こされ、これにより函手 $f^* : \mathcal{LS}(Y) \to \mathcal{LS}(X)$ が引き起こされる。このとき以下は同値：

- f は weak equivalence
- $\pi_0(f)$ は (集合の) 同型であり、さらに任意の n に対して局所系の射 $\Pi_n(X) \to f^*\Pi_n(Y)$ も同型である。
- $\pi_0(f)$ は (集合の) 同型であり、さらに任意の n に対して以下の図式は fiber 積の図式となる：

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{x \in X_0} \pi_n(X, x) & \longrightarrow & \coprod_{y \in Y_0} \pi_n(Y, y) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ X_0 & \longrightarrow & Y_0 \end{array}$$

証明. 一つ目と三つ目の同値性は weak equivalence の定義が各ホモトピー群の間に同型射を引き起こすことだから。二つ目と三つ目の同値性は二つ目は同型射で各成分に属する点を繋いでいて、三つ目はそうではないというだけである。 □

定義 8.5. $X \in \mathsf{Pro}(\mathsf{sSet}), X : I \to \mathsf{sSet}$ に対して、$\mathcal{LS}(X) :\stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{colim}_{i \in I} \mathcal{LS}(X_i)$ と定義する。これは圏の圏での filtered colimit である。$(f : X \to Y) \in \mathsf{Pro}(\mathsf{sSet})$ が **Isaksen weak equivalence** であるとは、以下を全て満たすことを言う：

- $\pi_0(f)$ は pro-set の同型。
- 任意の n に対し $\Pi_n(X) \to f^*\Pi_n(Y)$ は $\mathsf{Pro}(\mathcal{LS}(X))$ の同型 (次の remark を参照)。

注意 8.6. $X \in \mathsf{Pro}(\mathsf{sSet}), X : I \to \mathsf{sSet}$ と各 $i \in I$ に対し、

$$\mathcal{LS}(X_i) \to \mathrm{colim}_{i \in I} \mathcal{LS}(X_i) = \mathcal{LS}(X), \Pi_n(X_i) \mapsto \Pi_n(X_i)$$

が引き起こされる。これによって $\Pi_n(X) :\stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\Pi_n(X_i), i \in I\} \in \mathsf{Pro}(\mathcal{LS}(X))$ が定まる。

定理 8.7. $\mathsf{Pro}(\mathsf{sSet})$ は以下のモデル構造を持つ：

- we. = Isaksen we.
- cof. = $\mathrm{Lw}^{\cong}$(mono.)

このモデル圏の構造を $\mathsf{Pro}(\mathsf{sSet})_{\mathrm{Isa}}$ と書く。

注意 8.8. $f : X \to Y$ を pro-simplicial set の射とする。

$f \in \mathrm{Lw}(\mathrm{we.})$
$\Rightarrow$ ある I があって $X, Y : I \to \mathsf{sSet}$ であり、さらに $f_i : X_i \to Y_i$ はすべて weak equiv.
$\Rightarrow$ $\forall i$ で $\pi_0(f_i)$ は同型射であり、$\forall i, \forall n$ で $\Pi_n(X_i) \to f_i^*\Pi_n(Y_i)$ は $\mathcal{LS}(X_i)$ の同型射。

$\Rightarrow$ $\pi_0(f)$ は pro-set の同型射であり、$\forall n$ で $\Pi_n(X) \to f^*\Pi_n(Y)$ は $\mathsf{Pro}(\mathcal{LS}(X))$ の同型射。
$\Rightarrow$ f は Isaksen weak equivalence.

すなわち、$\mathsf{Pro}(\mathsf{sSet})_{\mathrm{Isa}}$ は $\mathsf{Pro}(\mathsf{sSet})$ の左 Bousfield 局所化である。よって

$$\mathrm{Ho}(\mathsf{Pro}(\mathsf{sSet})_{\mathrm{Isa}}) \underset{\text{left adj.}}{\overset{\text{fully faithful right adj.}}{\rightleftarrows}} \mathrm{Ho}(\mathsf{Pro}(\mathsf{sSet}))$$

となる。

Isaksen weak equivalence の特徴づけのために、以下の定義をする：

定義 8.9. $X \in \mathsf{Pro}(\mathsf{sSet}), L = (L_i)_{i\in I} \in \mathcal{LS}(X) = \mathrm{colim}_{i\in I}\, \mathcal{LS}(X_i)$ とする。

$$H^i(X; L) :\overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{colim}_{j\geq j_0}\, H^i(X_j; L_{j_0}|_{X_j})$$

と定義する。ただし局所系のコホモロジーは幾何的実現の上の局所定数層と考えたコホモロジーである。

定義 8.10. $X \in \mathsf{sSet}$ の **Postnikov tower**

$$P(X) : X \to \cdots \to P_n(X) \to P_{n-1}(X) \to \cdots \to P_0(X)$$

とは、$\mathbb{N}$ で添字づけられた simplicial set の列であり、以下の条件を満たすものである：

- 各 n に対して $P_{n+1}(X) \to P_n(X)$ は fibration である。
- 各 n に対して、$\forall i \leq n, \forall x \in X_0$ で $\pi_i(X, x) \cong \pi_i(P_n(X), x)$ である。
- 各 n に対して、$\forall i > n, \forall x \in X_0$ で $\pi_i(P_n(X), x) = 0$ である。

X が Kan complex であれば、$\mathrm{cosk}_n(X)$ は X の Postnikov tower を定める。

$X \in \mathsf{Pro}(\mathsf{sSet}), X : I \to \mathsf{sSet}$ の **Postnikov towor** を、$P(X) : I \times \mathbb{N} \to \mathsf{sSet}, (i, n) \mapsto P_n(X_i)$ で定義する。

定理 8.11 (cohomological criterion of Isaksen weak equivalence)**.** $(f : X \to Y) \in \mathsf{Pro}(\mathsf{sSet})$ に対して以下は同値：

(a) f は Isaksen weak equivalence である。
(b) 以下を全て満たす：
  - $\pi_0(f)$ は pro-set の同型射である。
  - 自然な射 $\Pi_1(X) \to f^*\Pi_1(Y)$ は同型である。
  - 任意の i と任意の $L \in \mathcal{LS}(Y)$ に対して $H^i(Y; L) \to H^i(X, f^*L)$ は同型である。

(c) $(P(X) \to P(Y)) \in \mathrm{Lw}^{\cong}(\mathrm{we.})$ である (Isaksen の言葉では、strict weak equivalence)。

証明は述べない。[Isa, 定理 7.3] 参照。sSet にまつわるいくつかのモデル圏が登場したので、関係性を示しておく。以下において、各射の組は随伴対となっていて、左から右に向かう射が左 (Quillen) 随伴となっている：

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{sSet} \arrow[r, shift left, "\mathrm{const.}"] & \mathsf{Pro}(\mathsf{sSet}) \arrow[l, shift left, "\lim"] \arrow[r, shift left, "\mathrm{id}"] & \mathsf{Pro}(\mathsf{sSet})_{\mathrm{Isa}} \arrow[l, shift left, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{Ho}"] \\
\mathrm{Ho}(\mathsf{sSet}) \arrow[r, shift left, "\mathbb{L}\,\mathrm{const.}"] & \mathrm{Ho}(\mathsf{Pro}(\mathsf{sSet})) \arrow[l, shift left, "\mathbb{R}\lim"] \arrow[r, shift left, "\mathbb{L}\,\mathrm{id}"] & \mathrm{Ho}(\mathsf{Pro}(\mathsf{sSet})_{\mathrm{Isa}}) \arrow[l, shift left, "\mathbb{R}\,\mathrm{id}"]
\end{tikzcd}$$

第 III 部

The Étale Homotopy Type as a Derived Functor

9 The Étale Homotopy Type

定義 9.1. $\mathcal{C}$ を (小さい) サイトで十分点を持つとする。$\Gamma^* : \mathsf{sSet} \leftrightarrows \mathsf{sSh}(\mathcal{C}) : \Gamma_*$ を定数層-大域切断の随伴とする。このとき Γ^* は有限極限を保つ accessible な函手である[*2]。このとき "随伴函手定理"[*3]により、$\mathsf{Pro}(\Gamma^*) : \mathsf{Pro}(\mathsf{sSet}) \to \mathsf{Pro}(\mathsf{sSh}(\mathcal{C}))$ は左随伴 L_{Γ^*} を持つ。Γ^* は we. と fib. をそれぞれ local we. と local fib. へ写すので、$\mathsf{Pro}(\Gamma^*)$ は right Quille 函手となる。よって随伴対 $(L_{\Gamma^*}, \mathsf{Pro}(\Gamma^*))$ は Quillen 随伴である。

$|\mathcal{C}| = |\mathsf{Sh}(\mathcal{C})| :\overset{\mathrm{def}}{=} \mathbb{L}\, L_{\Gamma^*}(*) \in \mathrm{Ho}(\mathsf{Pro}(\mathsf{sSet}))$ と定義し、これを $\mathcal{C}$ の **topological realization** と言う。ただし $*$ は終対象である。

注意 9.2. $\mathsf{Sh}(\mathcal{C})$ が**局所連結** (locally connected), つまり任意の対象が連結な対象の coproduct となっているとする。このとき函手 $\Gamma^* : \mathsf{Set} \to \mathsf{Sh}(\mathcal{C})$ は左随伴 $\pi_0 : \mathsf{Sh}(\mathcal{C}) \to \mathsf{Set}$ を持つ (連結成分をとる函手)。すると $L_{\Gamma^*} = \mathsf{Pro}(\pi_0)$ となる。よって $|\mathcal{C}| = \mathbb{L}\,\mathsf{Pro}(\pi_0)(*)$ である。

例 9.3. $\mathcal{C}$ を小圏とする。id のみを被覆とする自明な位相により $\mathcal{C}$ をサイトとみなす。このとき $\mathsf{sSh}(\mathcal{C}) = \mathsf{sPSh}(\mathcal{C}) = \mathsf{sSet}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$ となる。対象 $U \in \mathcal{C}$ に対して、U を代入する函手 $(-)(U) : \mathsf{PSh}(\mathcal{C}) \to \mathsf{Set}, \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}(U)$ は連続かつ余連続であり、よって随伴函手定理により右随伴 $R_U : \mathsf{Set} \to \mathsf{PSh}(\mathcal{C})$ を持つ。随伴対 $((-)(U), R_U)$ はトポスの射 $\mathsf{Set} \to \mathsf{PSh}(\mathcal{C})$ であるので、これは $\mathsf{PSh}(\mathcal{C})$ の点となる。よって明らかに $\mathsf{PSh}(\mathcal{C})$ は十分点を持つ。

例 7.5の最後の記述を思い出すと、この位相で $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ が local fibration であることは、たんに各 $U \in \mathcal{C}$ に対して $f(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ が fibration であることと等しい。すなわち、$\mathsf{sSet}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$ の local weak equivalence と local fibration は、射影モデル構造における weak equivalence と fibration である。よってこの $\mathsf{sSet}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$ の weak fibration category の構造は、射影モデル構造の忘却として得られる。

定数層函手 $\Gamma^* : \mathsf{Set} \to \mathsf{Set}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$ はたんに与えられた集合を値とする定値函手 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ を対応させる函手である。その左随伴は $\mathrm{colim}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$ である。$\varnothing \to Q \to *$ を終対象 $*$ の圏 $\mathsf{sSet}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$ における cofibrant repracement 函手とする。今、$\mathsf{sSet}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$ に射影モデル構造を考えているので、$\mathsf{Pro}(\mathsf{sSet}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}})$ のモデル構造の定義から、$\varnothing \to Q \to *$ は $\mathsf{Pro}(\mathsf{sSet}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}})$ における cofibrant repracement 函手にもなっている。従って

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{C}| &= \mathbb{L}\,\mathsf{Pro}(\mathrm{colim}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}})(*) && (\text{étale homotopy type の定義}) \\
&= \mathsf{Pro}(\mathrm{colim}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}})(Q) && (\text{total derived functor の定義}) \\
&= \mathrm{colim}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(Q) && (Q \text{ は constant な pro-object}) \\
&= \mathrm{hocolim}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(*) && (\text{homotopy colimit の定義}) \\
&\cong |\mathcal{C}^{\mathrm{op}}| && (\text{well-known}) \\
&\cong |\mathcal{C}|
\end{aligned}
$$

となる。

[*2] accessible な函手とは、十分大きな κ に対して κ-filtered colimit を保つ函手のこと

[*3] 少し違う：[BaSc, 5 章] 参照

10 Comparison with Artin-Mazur's Étale Homotopy Type

観察 10.1. $\mathcal{C}$ を (homotopically small pro-admissible な) weak fibration category とする。すると、定理 7.6により $\mathsf{Pro}(\mathcal{C})$ はモデル構造を持つ。X が $\mathcal{C}$ の対象であるとする。圏 $\mathcal{C}_{/X}$ の充満部分圏 $\mathsf{Triv}_{/X}$ を、$\mathcal{F}\cap\mathcal{W}$ に属する射 $Y\to X$ からなるものとして定義する。

X の $\mathsf{Pro}(\mathcal{C})$ における cofibrant replacement を $f: H\to X$ とする。このとき、定理 7.2より、$f\in \mathrm{Sp}^{\cong}(\mathcal{F}\cap\mathcal{W})$ と取れる。さて、$H: I\to\mathcal{C}$ とし、$X: I\to\mathcal{C}, i\mapsto X$ と考え、f は自然変換 $f_i: H_i\to X$ により得られているとする。すると $f\in\mathrm{Sp}(\mathcal{F}\cap\mathcal{W})\subset\mathrm{Lw}(\mathcal{F}\cap\mathcal{W})$ であるから、$f_i\in\mathcal{F}\cap\mathcal{W}$ である。よって H は函手 $\alpha: I\to\mathsf{Triv}_{/X}, i\mapsto H(i)$ を定める。射 $(Y\to X)\in\mathcal{F}\cap\mathcal{W}$ に対し、$\mathsf{Pro}(\mathcal{C})$ の図式

$$\begin{tikzcd}
\varnothing \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{cof.}"'] & Y \arrow[d, "\mathcal{F}\cap\mathcal{W}"] \\
H \arrow[r, "\mathrm{t.fib.}"'] \arrow[ur, dashed, "\exists h"] & X
\end{tikzcd}$$

ができる。$\mathcal{F}\cap\mathcal{W}\subset\mathrm{Sp}^{\cong}(\mathcal{F}\cap\mathcal{W})$ なので、この図式がリフトする。よって以下のことがわかる：

- 任意の対象 $Y\in\mathsf{Triv}_{/X}$ に対し、ある $i\in I$ と射 $(h: H(i)\to Y)\in\mathsf{Triv}_{/X}$ が存在する。

つまり、$\alpha: I\to\mathsf{Triv}_{/X}$ は cofinal となる。

(定義より) $\mathcal{F}\cap\mathcal{W}$ は基底変換で閉じているので、$\mathsf{Triv}_{/X}$ は cofiltered となることに注意する。従って、$\mathsf{Triv}_{/X}\to\mathcal{C}, (Y\to X)\mapsto Y$ は H と同型な pro-object を定める。

これを $\mathsf{sSh}(\mathcal{C})$ の場合に適用する。以下の事実がある：

Recall (Jardine)**.** $\mathcal{C}$ を (小さい、十分点を持つ、subcanonical な[*4]) サイトとする。$X\in\mathcal{C}$ を対象とする。$h_X=\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,X)\in\mathsf{Sh}(\mathcal{C})\subset\mathsf{sSh}(\mathcal{C})$ と置く。$U_\bullet\to X$ を X の hypercover とする。単体的層の射 $u: h_{U_\bullet}\to h_X$ ができる。

このとき、u は local trivial fibration である。従って u は $\mathsf{Triv}_{/h_X}$ の対象である。さらに X の hypercover たちは、$\mathsf{Triv}_{/h_X}$ の中で cofinal である。

証明. Appendix にまわすが、この証明はいかにも "ホモトピー論的" であり、hypercover の意味を明確にしてくれる、意義のあるものだと思う。 □

以下の定義をしておく：

定義 10.2. $\mathcal{X}$ を単体的層とする。$\mathsf{Triv}_{/\mathcal{X}}$ の各 Hom を right homotopy で割った圏を $\pi\mathsf{Triv}_{/\mathcal{X}}$ と書く。ここで、単体的層の射 $f,g:\mathcal{F}\to\mathcal{G}$ に対してある $h:\mathcal{F}\to\mathcal{G}\otimes\Delta^1$ が存在して f,g がそれぞれ h の $0,1$ への射影となるとき、f,g は right homotopic であると定める。ここで単体的集合 X と単体的層 $\mathcal{G}$ に対して $\mathcal{G}\otimes X$ は $(\mathcal{G}\otimes X)_n :\overset{\mathrm{def}}{=} \coprod_{x\in X_n}\mathcal{G}_n$ で定める。二つの right homotopic な射 $f,g:\mathcal{F}\rightrightarrows\mathcal{G}$ のホモトピーを $h:\mathcal{F}\to\mathcal{G}\otimes\Delta^1$ とすれば、$\pi_0(\mathcal{G}\otimes\Delta^1)=\pi_0(\mathcal{G})\times\Delta^1$ であるから、$\pi_0(h)$ は $\pi_0(f),\pi_0(g)$ をつなぐ right homotopy となることに注意する。

[*4] 米田埋め込み $\mathcal{C}\to\mathsf{PSh}(\mathcal{C})$ が $\mathsf{Sh}(\mathcal{C})$ を経由するということ。

このとき $\pi\mathsf{Triv}_{/\mathcal{X}}$ もまた cofiltered であり、自然な射 $\mathsf{Triv}_{/\mathcal{X}} \to \pi\mathsf{Triv}_{/\mathcal{X}}$ は cofibal である。

一般のサイト $\mathcal{C}$ の topological realization を計算してみる。簡単のため、$\mathcal{C}$ は終対象 $*$ を持つとする。たとえばスキーム X に対する Zariski サイトや étale サイトはどちらも終対象を持つ。すると h_* は $\mathsf{sSh}(\mathcal{C})$ の終対象 $*$ に他ならない。$\varphi_* : \mathsf{Triv}_{/*} \to \mathsf{sSh}(\mathcal{C})$ は $*$ の cofibrant replacement を与えるので、φ_* の $L_{\Gamma^*} : \mathsf{Pro}(\mathsf{sSh}(\mathcal{C})) \to \mathsf{Pro}(\mathsf{sSet})$ での行き先は $\mathrm{Ho}(\mathsf{Pro}(\mathsf{sSet}))$ において $|\mathcal{C}|$ と同型な対象となる。つまり、$\mathrm{Ho}(\mathsf{Pro}(\mathsf{sSet}))$ において $|\mathcal{C}| \cong \overline{L_{\Gamma^*}(\varphi_*)}$ である。簡単のために、さらに $\mathcal{C}$ は局所連結であるとする。このとき $L_{\Gamma^*} = \mathsf{Pro}(\pi_0)$ である。すると $\mathsf{Pro}(\pi_0)(\varphi_*) = \pi_0 \circ \varphi_* : \mathsf{Triv}_{/*} \to \mathsf{sSet}$ である。

自然な射 $\mathsf{Pro}(\mathsf{sSet}) \to \mathsf{Pro}(\mathrm{Ho}(\mathsf{sSet}))$ は明らかに levelwise weak equivalence を同型に写すので、$\mathsf{Pro}(\mathsf{sSet}) \to \mathrm{Ho}(\mathsf{Pro}(\mathsf{sSet}))$ を一意的に経由する。このとき、$\mathrm{Ho}(\mathsf{Pro}(\mathsf{sSet}))$ の対象 $|\mathcal{C}| = \mathsf{Pro}(\pi_0)(\varphi_*) : \mathsf{Triv}_{/*} \to \mathsf{sSet}$ は $\mathsf{Pro}(\mathrm{Ho}(\mathsf{sSet}))$ において $\mathsf{Triv}_{/*} \xrightarrow{|\mathcal{C}|} \mathsf{sSet} \to \mathrm{Ho}(\mathsf{sSet})$ へと写される。

$\mathsf{Triv}_{/*} \xrightarrow{|\mathcal{C}|} \mathsf{sSet} \to \mathrm{Ho}(\mathsf{sSet})$ は right homotopy を同型へ写すので、自然な射 $\mathsf{Triv}_{/*} \to \pi\mathsf{Triv}_{/*}$ を一意的に経由する：

$$\begin{tikzcd}
& \mathsf{Triv}_{/*} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\pi"] & \mathsf{sSh}(\mathcal{C}) \arrow[r, "\pi_0"] & \mathsf{sSet} \arrow[d, "\mathrm{Ho}"] \\
HR(\mathcal{C}) \subset & \pi\mathsf{Triv}_{/*} \arrow[rr, dashed, "\exists!"] & & \mathrm{Ho}(\mathsf{sSet})
\end{tikzcd}$$

$\pi\mathsf{Triv}_{/*}$ の中で $*$ の hypercover たちで生成された full subcategory を $HR(\mathcal{C})$ と書く。このとき $\mathsf{Triv}_{/*}$ の中で hypercover たちが cofinal であったことから、$HR(\mathcal{C}) \subset \pi\mathsf{Triv}_{/*}$ も cofinal である。合成 $HR(\mathcal{C}) \to \pi\mathsf{Triv}_{/*} \to \mathrm{Ho}(\mathsf{sSet})$ の定める対象は [AM, 9 章] にある Verdier functor に他ならない。$HR(\mathcal{C}) \to \pi\mathsf{Triv}_{/*}$ が cofinal であることから、これは $|\mathcal{C}| \in \mathrm{Ho}(\mathsf{Pro}(\mathsf{sSet}))$ の $\mathsf{Pro}(\mathrm{Ho}(\mathsf{sSet}))$ での行き先でもある。

以上で次の比較定理が示された：

定理 10.3. $\mathcal{C}$ を有限極限を持ち、locally connected で、終対象が連結な対象となるサイトとする ([AM, 9 章] でのセッティング)。このとき [AM, 9 章] における Verdier functor $\Pi\mathcal{C}$ は、自然な射 $\mathrm{Ho}(\mathsf{Pro}(\mathsf{sSet})) \to \mathsf{Pro}(\mathrm{Ho}(\mathsf{sSet}))$ による $|\mathcal{C}|$ の写り先と同型である。

この観察をつかって $\mathrm{Ho}(\mathsf{sSh}(\mathcal{C}))$ の射の集合を記述し、Eilenberg-MacLane 対象を使って Verdier の hypercovering theorem を導出するという話もある ([BaSc, 例 7.25] 参照)。

付録 A　A Note about Hypercoverings

hypercover が $\mathsf{Triv}_{/h_X}$ において cofinal であるという Jardine の結果を証明する。はじめに hypercover の定義を思い出しておく：

定義 A.1. $\mathcal{C}$ をサイトとし、X を対象とする。$\mathcal{C}$ の simplicial object $U_\bullet$ が X の **hypercover** であるとは、以下の条件を全て満たすことを言う：

- $U_0 \to X$ は被覆である。
- 各 $n \geq 0$ に対して $U_{n+1} \to \mathrm{cosk}_n(U_\bullet)_{n+1}$ は被覆である。

$Y \to X$ が被覆であれば、$h_Y \to h_X$ は全射となることに注意する。また、cosk_n は有限極限により定義されていて、$h : \mathcal{C} \to \mathsf{Sh}(\mathcal{C})$ は極限と可換であるから、$h_{\mathrm{cosk}_n(U_\bullet)_{n+1}} = \mathrm{cosk}_n(h_{U_\bullet})_{n+1}$ となる。

simplicial set の coskeleton の定義から、$X \in \mathsf{sSet}$ に対し $\mathrm{cosk}_n(X)_{n+1} = \mathrm{Hom}_{\mathsf{sSet}}(\Delta^{n+1}, \mathrm{cosk}_n(X)) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{sSet}}(\mathrm{sk}_n(\Delta^{n+1}), X) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{sSet}}(\partial\Delta^{n+1}, X)$ となることに注意する。

補題 A.2. X を simplicial set とし、Y を集合とする。$f : X \to Y$ を simplicial set の射とする。このとき f が trivial fibration であるための必要十分条件は、以下を満たすとする：

- $f_0 : X_0 \to Y$ は全射である。
- 任意の $n \geq 0$ に対して $X_{n+1} \to \mathrm{cosk}_n(X)_{n+1}$ は全射である。

証明. 任意に図式

$$\begin{tikzcd} \partial\Delta^n \arrow[r, "x"] \arrow[d, hook] & X \arrow[d, "f"] \\ \Delta^n \arrow[r, "y"] & Y \end{tikzcd}$$

を与える。$n = 0$ のときにこの図式がリフトすることは、$f_0 : X_0 \to Y$ が全射であることと同値である。$n > 0$ のとき。射 $\partial\Delta^n \xrightarrow{x} X$ は点 $x \in \mathrm{cosk}_{n-1}(X)_n$ と対応することに注意する。$n > 0$ の場合にこの図式がリフトすることは、f と包含 $\partial\Delta^n \subset \Delta^n$ により定まる自然な射 $X_n \to \mathrm{cosk}_{n-1}(X)_n \times_{\mathrm{cosk}_{n-1}(Y)_n} Y_n$ が全射であることと同値である。Y は集合であるから自然な射 $Y_n \to \mathrm{cosk}_{n-1}(Y)_n$ は同型となり、従ってこの図式がリフトすることは自然な射 $X_n \to \mathrm{cosk}_{n-1}(X)_n$ の全射性と同値である。 □

系 A.3. $\mathcal{C}$ を (十分点を持つ、subcanonical な) サイトとする。対象 X に対し、$U_\bullet \to X$ を X の hypercover とする。このとき単体的層の射 $h_{U_\bullet} \to h_X$ は local trivial fibration である。

証明. stalk は有限極限と可換であるから、特に cosk_n と可換である。あとは補題から従う。 □

系 A.4. $\mathcal{C}$ を (十分点を持つ、subcanonical な) サイトとする。Y を $\mathcal{C}$ 上の層、$\mathcal{X}$ を $\mathcal{C}$ 上の単体的層とし、$f : \mathcal{X} \to Y$ を射とする。このとき f が local trivial fibration であるための必要十分条件は、以下を全て満たすことである：

- $f_0 : \mathcal{X}_0 \to Y$ は全射である。
- 任意の n に対して自然な射 $\mathcal{X}_{n+1} \to \mathrm{cosk}_n(\mathcal{X})_{n+1}$ は全射である。

証明. 各 stalk ごとに補題を適用する。 □

Jardine の定理を証明する。

定理 A.5. $\mathcal{C}$ を (十分点を持つ、subcanonical な) サイトとする。X を $\mathcal{C}$ の対象とする。$\mathcal{X}$ を単体的層とし、$\mathcal{X} \to h_X$ を local trivial fibration とする。このとき、X の hypercover $U_\bullet$ と h_X 上の単体的層の射 $h_{U_\bullet} \to \mathcal{X}$ が存在する。

証明. 帰納的に構成する。まず $\mathcal{X}_0 \to h_X$ が全射であることと、$\mathrm{id}_X \in h_X(X) \neq \varnothing$ であることから、ある X の被覆 U_0 が存在し、$\mathcal{X}_0(U_0) \neq \varnothing$ となる。適当な元 $\alpha_0 \in \mathcal{X}_0(U_0)$ を選んで米田の補題で対応する射 $h_{U_0} \to \mathcal{X}_0$ をとる。

$n > 0$ とし、$(n-1)$-trancated な単体的対象 U_i と h_X 上の $(n-1)$-trancated な単体的層の射 $h_{U_\bullet} \to \mathsf{tr}_{n-1}(\mathcal{X})$ が構成されていて、各 $i < n$ に対して $U_i \to \mathrm{cosk}_{i-1}(U_\bullet)_i$ が被覆であるとする。ただし $\mathrm{cosk}_{-1}(U_\bullet) = X$ とする。U_n を構成すれば良い。$(n-1)$-trancated な単体的層の射 $h_{U_\bullet} \to \mathsf{tr}_{n-1}(\mathcal{X})$ に cosk_{n-1} を施して、単体的層の射 $\mathrm{cosk}_{n-1}(h_{U_\bullet}) \to \mathrm{cosk}_{n-1}(\mathcal{X})$ を得る。ここで自然に $\mathrm{cosk}_{n-1}(h_{U_\bullet}) \cong h_{\mathrm{cosk}_{n-1}(U_\bullet)}$ であるから、n-次の部分を見て、層の射 $h_{\mathrm{cosk}_{n-1}(U_\bullet)_n} \to \mathrm{cosk}_{n-1}(\mathcal{X})_n$ を得る。米田の補題で対応する元 $\beta_n \in \mathrm{cosk}_{n-1}(\mathcal{X})_n(\mathrm{cosk}_{n-1}(U_\bullet)_n)$ をとる。層の射 $\mathcal{X}_n \to \mathrm{cosk}_{n-1}(\mathcal{X})_n$ は全射であるから、ある $\mathrm{cosk}_{n-1}(U_\bullet)_n$ の被覆 U_n とある元 $\alpha_n \in \mathcal{X}_n(U_n)$ が存在し、α_n の $\mathrm{cosk}_{n-1}(\mathcal{X})_n(U_n)$ での行き先は $\beta_n|_{U_n}$ となる。α_n に対応する射 $h_{U_n} \to \mathcal{X}_n$ を取れば、帰納法が回る。 □

参考文献

[AM] M. Artin and B. Mazur, *Etale Homotopy*, Lecture Notes in Math., **100**, Springer-Verlag, (1969).

[BaSc] I.Barnea and T.Schlank, *A Projective Model Structure of Pro-Simplicial Sheaves, and the Relative Étale Homotopy Type*, Advances in Mathematics, (2011), 291.

[Isa] D.Isaksen, *A Model Structure on the Category of Pro-Simplicial Sets*, Transactions of the American Mathematical Society, (2001), 353.

[Jar] J.F.Jardine, *Local Homotopy Theory*, Springer Monographs in Mathematics, 2015.

[Stacks] The Stacks Project Authors, *Stacks Project*.